ヨーロッパの数学教育における負数の受容

小藤 俊幸*

1　はじめに

2010 年から，3 年生以上の学生を対象とした「代数系入門」という理工学部共通の選択科目を担当している．もともとは，群，環，体などの抽象代数学を講義する科目だったが，学部が，数理情報学部から，情報理工学部，さらには理工学部と変わり，現在，そうした抽象数学を学びたいと希望する学生は皆無であると思われる．例年，数学教員を目指す学生はいることから，高等学校の学習指導要領の改定で,「数学 A」にユークリッドの互除法などの整数論の内容が導入されたことを機に，初等整数論を中心としたものに授業内容を変更した．銀林の教科書 [13] を参考にして，自然数のペアノの公理から話を始めるようにしたのだが，自然数を整数に拡張する（負の数を導入する）部分の説明があまりうまく行かず，悩ましく思っていたとき，たまたま大学図書館で,『負の数学 (Negative Math) 』という本 [16] を見つけた．前半部は，主として，古代の中国やインドで生まれた負の数の概念が，ヨーロッパで受け入れられる過程が描かれている．負数を数と認めることは，我々が思う以上に抵抗が大きかったようである．その一端が，現在のフランスのコレージュ（collège, 日本の中学校に相当し，日本の小学校 6 年生から中学 3 年生までの年齢の生徒が通う 4 年制の学校）における数学教育にも垣間見える．自然数や分数，小数で表される正の数に対して，これらに +, − の符号が付いた数を，単に nombre ではなく，nombre relatif（直訳すると，相対的な数）と呼んでいる（例えば，[5], Chapitre 5“ Notion de nombres relatifs ”）．

上記の『負の数学』は，あくまで「読み物」として書かれていて，この本から，直ちに学術的な研究に移行することは難しいように思われる．本稿では，本格的な研究のための準備として，この本の内容を軸に，学術的な書籍（特に，[27]）の内容を取り入れながら，負数の受容の歴史についてまとめる．明治以降の日本の数学教育にも直接的，間接的に影響を及ぼした（例えば，[15]）フランスの数学教育の原点とも言える 17 世紀から 18 世紀にかけてのカトリックの数学教育を中心に考える．

2　古代からカルダノまで

J. デュドネ編『数学史 1700-1900 I』([12], pp. 60–61）には,「零と負数の使用は 19 世紀以前は経験的なものにとどまっていたとはいえ [**]，長いためらいののち（たとえば Viéte における，使用の方針への反対を見よ)，Descartes にはじまる頻繁な使用で決着がついた.」とあり，[**] の部分には,「これはヨーロッパの話であって，中国およびインドではずっと早

*南山大学理工学部システム数理学科

く負数および零の概念が確立していた.」と言う注釈が付けられている．この一文は，よほど慎重に注意深く読まないと，真意が読み取れないように思われる．ヨーロッパ（キリスト教国）に負数がもたらされたのは，フィボナッチ（ピサのレオナルド，1170 年頃–1250 年頃）が 1202 年にラテン語で著した Liber Abaci（『算板書』）が最初であると言われる．教育も含めて「決着がついた」のは，19 世紀の半ば（日本で言うと，明治の少し前）であり,「長いためらい」は，フィボナッチから考えると，650 年ぐらい続いた計算になる．

中国の算術書『九章算術』（著者不詳，成立年代は 1 世紀から 3 世紀の間ぐらい）で負数の計算が扱われている ([24], pp. 60-61)．また，インドのブラフマグプタ（Brahmagupta, 598 年–665 年頃）が 628 年に著した天文学書には，正数，負数，ゼロの和の規則と積の規則（現在，中学 1 年生の数学の教科書に書かれているような内容）が記されている（[14], pp. 196-197）．フィボナッチがヨーロッパにもたらした算術には，このインド数学の系統も含まれていたのであろう（[7], p. 168）．Liber Abaci には，答や中間の値に負の数が現れるような問題も数多く含まれていた．たいていの場合，フィボナッチはこうした負の値を insolubilis であるとして除いたが，金銭に関する問題については，負の値を借金と解釈して認めることもあった（[27], p. 39）．

負数は，シューケー（Nicolas Chuquet, 1445 年頃–1488 年頃，[7]，p. 204）らの使用を経て，カルダノ（Girolamo Cardano，1501 年–1576 年）が，3 次方程式，4 次方程式の解法を示した Ars Magna（『大なる術』，1545 年）で，その有効性が示された．Ars Magna は，負数よりも負数の平方根として虚数が現れたことでよく知られているが，カルダノは 1570 年に著した De Regla Ariza の中で,「マイナスかけるマイナスはマイナス」という奇妙な主張をしている．Regla は法則である．Ariza は「疑わしい」という意味のアラビア語 a' izzâ の誤記と言われている（[23], p. 162）．つまり，書名は『疑わしい法則』であり，当時でもよく知られていた「マイナスかけるマイナスはプラス」という符号の法則に疑義を呈したものと考えられる.『負の数学』は，このカルダノの主張を合理的に解釈することを試みているようであるが（そもそも，そのことが，この本の執筆動機のようであるが)，同書の説明に納得することは難しい．カルダノは占星術師であり，占星術の結果に合わせるために絶食をして自らの寿命を縮めたとも言い伝えられている.「正と負は完全に切り離された領域，言わば，2 つの異なる世界を形成していて，容易に混ざり合わない」と考えていたとする Schubring の説 ([27]，p. 45) のほうが，東洋人には受け入れやすいように思われる．カルダノは古代中国の陰陽説のような考え方を持っていたのではないだろうか.

3 フランスにおける歴史

3.1 イエスズ会とデカルト

現在の代数記号は，ヴィエタ（Franciscus Vieta, 1540 年–1630 年）やデカルト（René Descartes, 1596 年–1650 年）によって作られた (例えば，[17]，第 2 部 記号法)．デカルトが生まれた時代のフランスでは，さまざまな分野でカトリックが強い影響力を持っていた．デカルト自身も，イエスズ会が 1603 年に設立したラ・フレーシ学院で 10 歳から 18 歳まで (1606 年–1614 年）学んだ．イエスズ会士クラヴィウス（Chirstopher Clavius, 1537 年–1612 年）が 1606 年に著した Algebra（『代数学』）[8] はデカルトに強い影響を与えたとされる ([17], pp. 118-119, [26], p.53)．イエスズ会は，対抗宗教改革の中で現れた比較的新しい修

道会 (1540 年設立）であり，日本にキリスト教を伝えたザビエル（Francisco Xavier, 1506 年–1552 年）は会の創設メンバーの 1 人である．また, クラヴィウスの Euclidis Elementa (『ユークリッド原論』, ラテン語初版 1574 年）は，中国語に訳され，1611 年に『幾何原本』として出版された．小倉金之助は「公平に考えて，現代日本における幾何学の基本的術語や述べ方などは，和算に学ぶよりも，かえって『幾何原本』に負うところが大きいと思われる」と述べている（[7], p. 370, 注釈）．イエスズ会の日本の数学教育に対する貢献は，あらためて検証する必要があるように思われる．

デュドネ編『数学史』にも述べられているようにヴィエタは負の数について否定的であった．デカルトが負数をどう考えていたかについては，見解が分かれている.「負量の意味を理解し，自由に用いていた」と考える人もいれば，否定的な見解を取る人もいる（[27], p. 47）．足立による以下の指摘（[1], p. 65）は問題の本質を示しているように思われる．

「数を量として捉えている限り,（数学史家の一般的な見解にもかかわらず）デカルトは負数を表現する方法も与えていないと断言してよい。そもそもデカルトは，0 を数とみなしているが，負数を数とは認識していない（方程式の負の解を「偽根」とか「数の欠如」と呼んでいるだけである)。」

この指摘の前半部について解説する．この時代の代数学は幾何学に基づいて展開されていた．例えば，分配法則

$$a(b+c) = ab + ac \tag{1}$$

は，a, b, c が一般的な場合（正の実数の場合）については,『ユークリッド原論』，第 2 巻の「もし 2 線分があり，その一方が任意個の部分に分けられるならば，2 線分にかこまれた矩形は，分けられていない線分と分けれらた部分のおのおのとにかこまれた矩形に等しい。」([18], p.35) を成立の根拠としていた（**図 1**）．数の明確な定義が無かったため，(1) を一般的に証明する手段がなかった．また，デカルト以前の代数学は，理論的な根拠を幾何学においていたため,「次元」にとらわれすぎていた．例えば，a を線分の長さとすると，a^2 は 1 辺の長さが a の正方形の面積，a^3 は 1 辺の長さが a の立方体の体積であり，$a^2 + a^3$ のような式は，面積に体積を加えることを表すため，無意味とされた．こうした考え方を変えたのがデカルトである．**図 2** において，線分 OE の長さを 1，線分 OA の長さを a, 線分 OB の長さ b とする．点 A から線分 EB に平行な線を引き，直線 OB との交点を C とすれば，三角形の相似の性質から，線分 OC の長さが積 ab を与える．デカルトは，[11] の冒頭で，このような例を述べ,「次元」に拘泥する必要はないことを説いている．そのことは，上垣の著書 [30] の I，第 12 話「すべての連続量を長さで表したデカルト」でも紹介されている．足立の主張の前半部は，デカルトはすべての数を線分の長さで表そうとしていることから，負数の表現は与えていないと言う意味であろう．

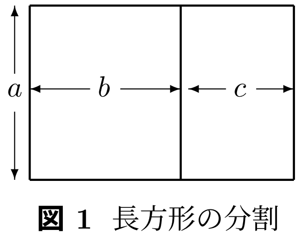

図 1 長方形の分割

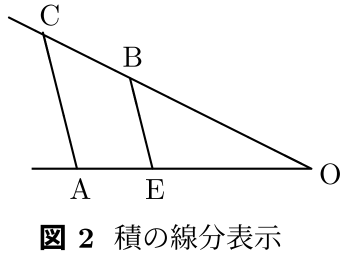

図 2 積の線分表示

否定的な見解を取る人の多くが，根拠として挙げるのが，デカルトが方程式の負の根を偽根（fausses racines），正の根を真根（vrayes racines）と呼んでいたこと ([11], p. 53) であ

る．デカルトが負数を偽と呼ぶのは，クラヴィウスの『代数学』の影響ではないかと思われる．クラヴィウスは“ De numeris fictis, sive minoribus quam nihil（偽りの数，ゼロより小さい数について）”（[8], pp.28-31）で負数を紹介している.「偽りの数」と表題に掲げてはいるが，負数の扱いは否定的ではない．むしろ，その有効性に着目しているように思われる．そもそも，意義を見出していなければ，取り上げることはなかったであろう．また，現在使われている虚数や虚根と言った用語に，どれだけ言葉本来の「虚」の意味が含まれるのかと考えると，こうした用語に拘る必要はないのかも知れない．デカルトも，少なくとも負数を考察の対象としていた．問題は，デカルトが負数を数と認識していたかどうかであるが，これは，デカルトが何を数と認識していたかということであり，判断のしようがないように思われる．ただし，デカルトの『幾何学』[11] には，例えば,「$+m$ ならば，長さ m の線分を切り取り，$-m$ ならば，線を反対側に引いて加える」（p. 23）のような記述が見られることから,「逆向き」という負の図形的な意味は認識していたと考えられる．

3.2 ジャンセニスムとオラトリオ会

デカルトが Discours de la Méthode（『方法序説』, 1637 年）をフランス語で著したように，この頃から，学術書がラテン語ではなく各国語で書かれるようになる．このことは，ヨーロッパ各国の識字率の向上と関係すると思われる．そうした方向性を数学教育の分野で打ち出したのが，アルノー（Antoine Arnauld, 1612 年–1694 年）によって著された Nouveaux Élémens de Géométrie（『幾何学新原論』, 1667 年）[2] である．簡単に述べると，デカルトの代数記号を用いて，フランス語で書かれた幾何学の教科書である．アルノーはジャンセニスム [9] と呼ばれる 17 世紀に起こった（カトリックの）宗教改革運動の当時の指導者であった．ジャンセニスムはイエスズ会と対立し，また，政治運動化し，その後 1 世紀半に渉って，イエスズ会と敵対することになる.『幾何学新原論』の頃は，まだ平和的であったと思われる．Schubring [27] によると，この本は，学者向けではなく，一般向けに書かれたはじめての数学教科書とのことである．この書の発刊には，当時，イエスズ会が優位に立っていた私学教育の分野で勢力を拡大する意図があったのではないかと推測される．いずれにせよ，デカルトの代数記号を一般に広めることに大きな役割を果たした．有名なジャンセニストにパスカル（Blaise Pascal, 1623 年–1662 年）がいる．パスカルは遺稿集 Pensées（『パンセ』）で J'en sais qui ne peuvent comprendre que qui de zéro ôte 4 reste zéro.（私はゼロから 4 を引けばゼロであることを理解できない人がいることを知っている）と述べていて（[20], p. 106），負数に関して否定的であったとされる．

『幾何学新原論』発刊の 8 年後の 1675 年に Prestet（Jean Prestet, 1648 年–1691 年）による Élémens des Mathématiques（『数学原論』）[22] と言うやはりフランス語で書かれた一般向けの教科書が発刊される．Prestet は神学者・哲学者として知られるマルブランシュ（Nicolas de Malebranche, 1638 年–1715 年）の数学に関する弟子である．マルブランシュは，オラトリオ会と呼ばれる（イエスズ会と同じく）宗教改革後に創設された修道会の修道士である．オラトリオ会の創始者とアルノーの師は親しい友人関係にあり，オラトリオ会は教義的にはジャンセニスムに近かったと思われるのだが，イエスズ会士はマルブランシュの哲学には共感したとのことである（[3], p. 374）.

イエスズ会，ジャンセニスム，オラトリオ会三者の関係をまとめると，**図 3** のようになる．哲学史上は，アルノーとマルブランシュは数多くの論戦を繰り返した論敵として知られ，

『数学原論』の発刊はそうした論戦の一環とも考えられる.『幾何学新原論』では消極的だった負の数の概念について,『数学原論』では，負の数と正の数を同等に扱った初めての説明が与えられた（[27], p. 53）．その後，ジャンセニスムが政治運動化したこともあって（アルノーはベルギーに追われた），教育分野ではオラトリオ会が優位に立ち，負の数はオラトリオ会士らによってフランスに広められる．例えば，1714 年に出版された教科書では，負数が「数直線」（**図 4**）に基づいて「CAB を正とするならば，BCA が負である」のように説明されている（[25], p. 14）．同じ時期に，イギリスでは，ニュートン（Isaac Newton, 1642 年–1727 年）が Arithmetica Universalis（『普遍算術』，1707 年ラテン語で出版，1720 年に英訳）において，負数を「逆向きの量」で説明しているとのことである（[1], pp. 67–69）．

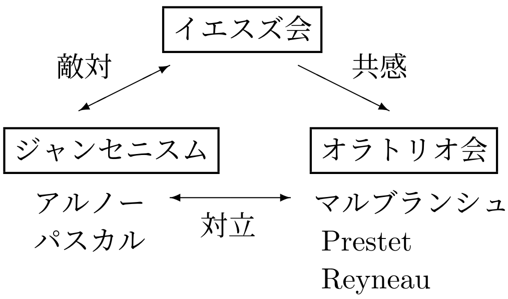

図 3 ジャンセニスムとオラトリオ会

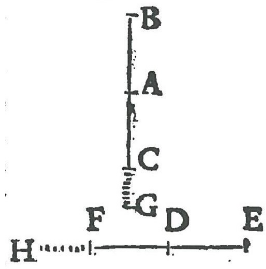

図 4 Reyneau (1714) の「数直線」

4 新たな反対者とイギリスへの影響

18 世紀の啓蒙思想の時代になって，負の数は，クレロー（Alexis-Claude Clairaut, 1713 年–1765 年）やダランベール（Jean le Rond d'Alembert, 1717 年–1783 年）らのパリ科学アカデミーの学者から攻撃される．例えば，ダランベールは自らが編者を務めた『百科全書』（1765 年）で項目 Négatif を執筆し，Il faut avouer qu'il n'est pas facile de fixer l'idée des quantités négatives（負量の考えを確定することは容易でないことを認めざる得ないが）と断りつつ，Il n'y a donc point réellement & absolument de quantité négative isolée（単独での負量は実際的にも絶対的にも存在しない）と述べている．Schubring は，ダランベールのこうした負量否定の要因を，ダランベールとオイラー（Leonhard Euler, 1707 年–1783 年）との間に起こった負数の対数に関する論争に見出そうとしている（[27], pp. 108–111）．確かにダランベールとオイラーには様々な確執があったことはよく知られている．負数なども自在に用いて成果を上げるオイラーに対して厳密さの観点からの批判もあったのかも知れない．ただし，ダランベールは，コレージュ・ド・マザランというジャンセニスムの学校で教育を受けており，そのことも影響しているのではないかと思われる．

イギリス，スコットランドでは，ニュートンによる Arithmetica Universalis，サウンダーソン（Nicholas Saunderson, 1682 年–1739 年）による Element of Algebra（1740 年），マクローリン（Colin MacLaurin, 1698 年–1746 年）による Treatise of Algebra（1748 年）によって負の数が広まった．しかし，18 世紀末まで，イギリスの数学教育の全般的なレベルは高くはなく，19 世紀になってようやくド・モルガン（Augustus De Morgan, 1806 年–1871 年）によって数学教育の改革がなされたことが『カジョリ初等数学史』に述べられている（[7], pp. 288–300).

18 世紀の後半から 19 世紀の初めにかけて，Maseres（Francis Maseres, 1731 年–1824 年）とフレンド（William Frend, 1757 年–1841 年）という 2 人の人物が，負数の使用そのものに反対する書籍を著した．ともにケンブリッジ大学で数学を学んだが，Maseres は法律家，フレンドは聖職者の道へ進んだ．数学史上は，無名と言ってよい存在である．ただし，Maseres は多くの数学教科書を執筆している．また，フレンドはド・モルガンの義父（妻の父親）であり，宗教家としては知られている．そうした無名の 2 人がニュートンとマクローリンと言うイギリスとスコットランドを代表する学者の考えに異を唱えた訳である．通常では起こり得ないと思われるのだが，2 人の主張は当時のイギリスの学界に大きな影響を与えた．上記のフランスの影響としか考えられない．

この「負数の問題」が当時のイギリス数学界に与えた影響は Pycior [23] によって考察されている．ピーコック（George Peacok, 1791 年–1858 年）は，この問題を回避するため，Arithmetical Algebra（算術代数）と Symbolical Algebra（記号代数）は「別物」であるという立場を取った．代数記号に現れる文字は数を表していると考える必要はなく，記号代数では，算術にとらわれず，自由に法則を研究すればよいとした．Pycior はこうした考え方が，例えば，ブール（George Boole, 1815 年–1864 年）によるブール代数のようなイギリスの抽象代数学の発展につながったとしている．日本語の「代数学」と言う用語は，中国の数学者李善蘭（1811 年–1882 年）がド・モルガンの Element of Algebra（1835 年） を『代数学』の書名で訳出したこと（[24], p. 335）に由来する．しかし，当のド・モルガンは記号を「数の代わり」とは考えていなかったのかも知れない．

5 おわりに

こうしたイギリスの流れが，ハミルトン（William Rowan Hamilton, 1805 年–1865 年），グラスマン（Hermann Günter Grassmann, 1809 年–1877 年），ハンケル（Hermann Hankel, 1839 年–1873 年）らを経て（例えば，[1]），デデキント（Julius Wilhelm Richard Dedekind, 1831 年–1916 年），ペアノ（Giuseppe Peano, 1858 年–1932 年）らによる自然数の公理的な定義 [10, 21] につながったと思われる．例えば，ペアノの公理の基礎となっている数学的帰納法にそうした名前を与えて自然数の基礎として重要であることを明示したのはピーコックである（[6], p. 200）．また，現在，多くの教科書で採用されている自然数の対の集合に同値関係を導入して整数を定義する方法（例えば，[31], 第 II 章「整数」）は，ワイエルシュトラス（Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, 1815 年–1897 年）による．ワイエルシュトラス自身は，この方法を公刊しなかったが，彼の講義を聞いた人々によって広められたと言われる．例えば，1896 年出版のフランスの教科書 [4] では，On peut définir les nombres négatifs de la façon suivante, due à M. Weierstrass [4]（M. ワイエルシュトラスの方法によって負の数を定義することができる）と，練習問題の形でこの方法が紹介されている (p.59).

自然数の公理的な定義は，ある意味で,「負数の問題」に完全な決着をつけた．負数に反対していた人々は，自然数を確固たる存在と認識していたと思われる．それに対して負の数はあやふやなものだと．一方，公理的な定義は，自然数も所詮人間の意識の産物にすぎず，確固たる存在ではないことを明らかにした．結果として，負数のあやふやさを非難する理由は無くなった．

イギリス留学から帰った菊池大麓（1855 年–1917 年）はトドハンター（Isaac Todhunter, 1820 年–1884 年）の教科書を薦めたと言われる．当時，高等学校（旧制高等学校）でもよ

く使用された（[19], p.153）トドハンターの教科書“ Algebra for the Use of Colleges and Schools ”[29] には，特に「負数の問題」を意識しているような様子は無く，現代の我々が読んでも全く違和感を感じない．幸か不幸か,「数」は，その有益性に重点がおかれ,「数とは何か」と言う根本的な問題意識を置き去りにした形で明治期の日本に持ち込まれたのではないだろうか．現状の数学教育を見ると，そのように思われるが，本当にそうか，そうだとすれば，それは日本の数学教育にとって良いことであったかなど，検証が必要であろう．

謝辞 本稿は，日本数学教育史学会第 18 回研究発表会（2018 年 11 月 16 日，岡山大学教育学部）での発表内容に加筆修正を加えたものである．発表の際に，熱心に御討論頂いた同会会員の方々に感謝したい．

参考文献

[1] 足立恒雄,『数とは何か そしてまた何であったか』，共立出版，2011 年.

[2] A. Arnauld, *Nouveaux élémens de géométire, ordre tout nouveau & nouvelles démonstrations*, Paris, 1667.

[3] ウィリアム・V・バンガート（上智大学中世思想研究所監修）,『イエスズ会の歴史』，原書房，2004 年.

[4] C. Bourlet, *Leçons d'algèbre élémentarie*, Colin, Paris, 1896.

[5] R. Brault, M.-C. Cipolin, I. Daro, I. Marfaing, B. Ripaud, *PHARE mathématiques 5e*, hachette éducation, 2016.

[6] F. Cajori, Origin of the name ”Mathematical Induction”, The American Mathematical Monthly, **25** (1918), pp. 197-201.

[7] F. カジョリ（小倉金之助 補訳）,『復刻版 カジョリ初等数学史』，共立出版，1997 年.

[8] C. Clavius, *Algebra*, Rome, 1608.

[9] ルイ・コニュ（朝倉剛，倉田清 訳）,『ジャンセニスム』，白水社，1966 年.

[10] R. デデキント (渕野昌 訳),『数とは何かそして何であるべきか』(ちくま学芸文庫)，筑摩書房，2013 年 (原著 1887 年).

[11] R. デカルト（原亨吉 訳）,『デカルト著作集 1』，幾何学，白水社，1973 年 (原著 1637 年).

[12] J. デュドネ編（上野健爾，金子晃，浪川幸彦，森田康夫，山下純一 訳）,『数学史 1700-1900 I』，岩波書店，1985 年.

[13] 銀林浩,『初等整数論入門』，ちくま学芸文庫，筑摩書房，2015 年.

[14] 林隆夫,『インドの数学 ゼロの発明』，中公新書 1155，中央公論社，1993 年.

[15] 公田蔵，明治時代に学ばれたフランス流数学，数理解析研究所講究録 **1677** (2010), pp. 230–242.

[16] アルベルト・A・マルティネス（小屋良祐 訳）,『負の数学 マイナスかけるマイナスはマイナスになれるのか?』，青土社，2006 年.

[17] 中村幸四郎,『数学史 ー形成の立場からー』，共立出版，1981 年.

[18] 中村幸四郎，寺阪英孝，伊東俊太郎，池田美恵（訳・解説）,『ユークリッド原論』，共立出版，1971 年.

[19] 「日本数学 100 年史」編集委員会（編），日本の数学 100 年史（上），岩波書店，1983 年.

[20] B. Pascal, *Pensées*, Texte établi par Louis Lafuma, Éditions du Seuil, 1962.

[21] G. ペアノ (小野 勝次, 梅沢 敏郎 訳),『ペアノ 数の概念について』(現代数学の系譜 2)，共立出版，1969 年 (原著 1891 年).

[22] J. Prestet, *Élémens des mathématiques, ou principes généraux de toutes les science*, Paris, 1675.

[23] H. M. Pycior, Goerge Peacock and the British origins of symbolical algebra, Historia Mathematica **8** (1981), pp. 23–24.

[24] 銭宝琮 編（川原秀城 訳）,『中国数学史』，みすず書房，1990 年.

[25] C. R. Reyneau, *La science du calcul des grandeurs en général, ou les élémens ees mathématiques*, Paris, 1714.

[26] 佐々木力,『デカルトの数学思想』，東京大学出版会，2003 年.

[27] G. Schubring, *Conflicts between generalization, rigor, and intuition, Number concepts underlying the development of analysis in 17-19th century France and Germany*, Springer, 2010.

[28] R. C. H. Tanner, The alien realm of the minus: Deviatory mathematics in Cardano's writings, Annals of Science, **37:2** (1980), pp. 159–178.

[29] I. Todhunter, *Algebra for the use of colleges and schools, With numerous examples*, 7th ed. Macmillan an co. , London, 1875.

[30] 上垣渉,『算数・数学授業を楽しくする数学史の話』，明治図書，1990 年.

[31] 柳原弘志, 織田進,『数をとらえ直すー数体系の論理的構築』，裳華房，2005 年.